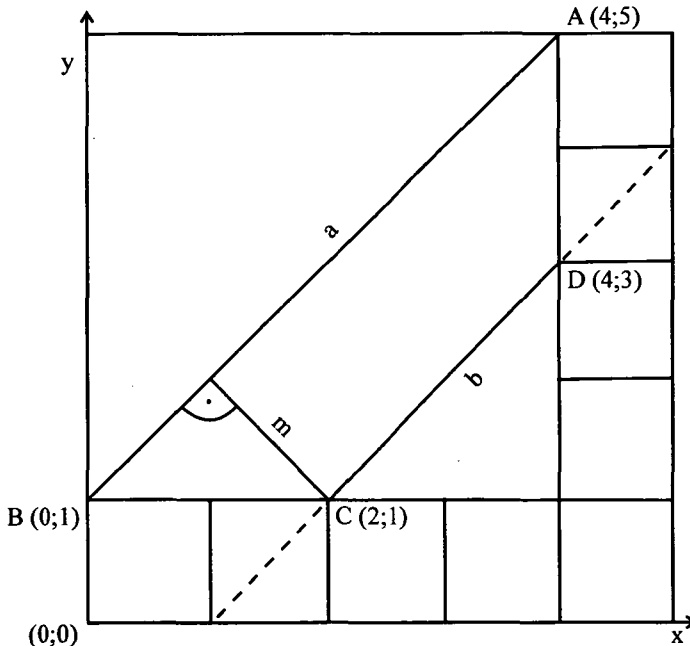


A Szendrei János Matematika Verseny feladatainak megoldásai

Előző cikkünkben [1] a Szendrei János Matematika Verseny feladatait ismertettük. Most a részletes kidolgozást igénylő feladatokat megoldjuk, valamint a tesztkérdésekre adott helyes válaszokat megadjuk.

Részletes kidolgozást igénylő feladatok megoldásai

1. feladat megoldása. A következő ábrán felrajzoltuk koordinátarendszerben a szivacs útját.



Az ábrából látjuk, hogy az x, illetve az y tengely irányába történő eltoláskor a szivacs összesen 9 egység négyzetet színez be. Majd a ferde eltolásnál az ábrán látható $ABCD$ trapézt színezi be. Az ábrán lévő jelöléseket alkalmazva kapjuk, hogy

$$a = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \quad b = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Másrészt a $2 = \sqrt{m^2 + m^2} = m\sqrt{2}$ -ből $m = \sqrt{2}$ adódik. Ezek felhasználásával az $ABCD$ trapézt területe:

$$T_{ABCD} = \frac{a+b}{2}m = \frac{4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2}\sqrt{2} = 6.$$

A szivacs így összesen $9 + 6 = 15$ területegységet színez be.

2. feladat megoldása. Először számoljuk össze az összes esetek számát. A következő esetekben lehet a kihúzott számok összege 6:

a) A felírt számok mindegyike 2, azaz a 2, 2, 2 sorozatot húzzuk. Ez 1 esetben lehetséges.

b) A felírt számok különbözők. Ekkor az 1, 2, 3 számokkal jelzett különböző golyókat húzzuk egymásután. Ezen esetek száma, azaz az 1, 2, 3 számok lehetséges kihúzási sorrendjeinek a száma $3! = 6$.

Más esetekben nem lehet a kihúzott számok összege 6. Az összes esetek száma: $1 + 6 = 7$.

A kedvező esetek száma nyilván 1. A keresett valószínűség a kedvező esetek száma osztva az összes esetek számával, ami $\frac{1}{7}$.

3. feladat megoldása. Sanyi, Kati és Évi sebességét ebben a sorrendben jelölje v_1, v_2 és v_3 .

Legyen x a távolság hossza méterben. Sanyi célba érkezésekor Kati $x - 300$, Évi pedig $x - 400$ métert tett meg. Mivel ugyanannyi idő alatt tették meg ezeket a távolságokat, így felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{x - 300}{v_2} = \frac{x - 400}{v_3}.$$

Másképp, Kati célba érésig x métert tett meg. Ugyanannyi idő alatt Évi $x - 110$ métert tett meg, azaz

$$\frac{x}{v_2} = \frac{x - 110}{v_3}.$$

Az előzőekből kapjuk, hogy

$$\frac{v_3}{v_2} = \frac{x - 400}{x - 300} = \frac{x - 110}{x},$$

azaz

$$\frac{x - 400}{x - 300} = \frac{x - 110}{x}.$$

Az utóbbi egyenletből rendezés után a következő egyenlet adódik:

$10x = 33000$, azaz $x = 3300$. A versenyt 3300 méteres távon rendezték meg.

4. feladat megoldása. Tegyük fel, hogy vannak olyan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ számok, amelyekre a $D = b^2 - 4ac = 123$ összefüggés teljesül. A b^2 nem lehet páros szám, mert akkor a $b^2 - 4ac$ is páros szám lenne. Így a b^2 csak páratlan szám lehet, de akkor a b is páratlan. Ezért a $b = 2n + 1$ alakban írható, ahol $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor $(2n + 1)^2 - 4ac = 123$, amiből $4(n^2 + n - ac) = 122$. Az utóbbi nem teljesülhet, mivel a 122 nem osztható 4-gyel. Így el-lentmondáshoz jutunk, azaz nincsenek olyan $a, b, c \in \mathbb{Z}$ számok, amelyekre teljesül, hogy $b^2 - 4ac = 123$.

Most legyen $b^2 - 4ac = 125$, ahol $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Mivel a 125 páratlan szám, így az előző gondolatmenet szerint a b csak páratlan szám lehet. Legyen $b = 2n + 1$, ahol $n \in \mathbb{Z}$. Ekkor a $b = 2n + 1$ értéket a $b^2 - 4ac = 125$ összefüggésbe behelyettesítve rendezés után kapjuk, hogy $n^2 + n - ac = 31$. Az utóbbi összefüggést az $n = 5$, $a = 1$ $c = -1$ értékek kielégítik. A $b = 11$, $a = 1$ és $c = -1$ értékek esetén a diszkrimináns értéke 125, azaz lehet a diszkrimináns értéke 125.

5. feladat megoldása. A következő eseteket vizsgáljuk:

a) $x^2 - x - 1 \neq 0$ és $x + 2 = 0$. Ez $x = -2$ esetén teljesül.

b) $x^2 - x - 1 = 1$. Ekkor $x_1 = -1$ és $x_2 = 2$.

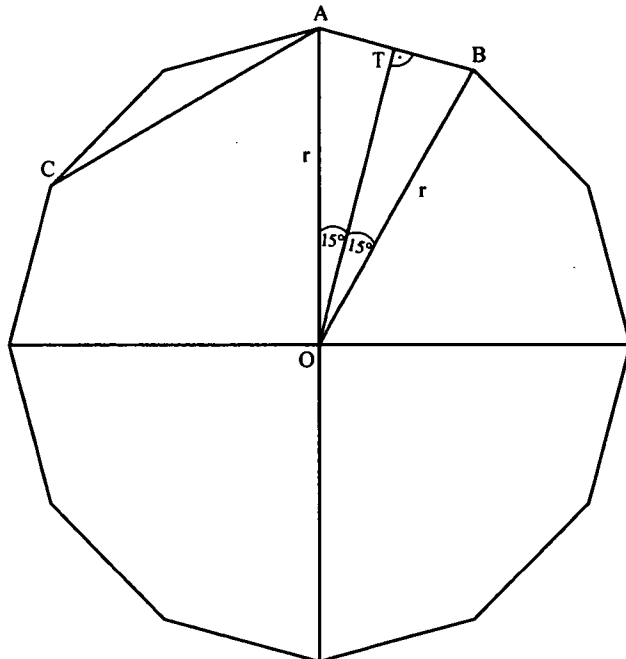
c) $x^2 - x - 1 = -1$ esetén az $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Az $x + 2$ számnak párosnak kell lenni. Ekkor az $x_1 = 0$ a megoldás.

Az összes megoldások: -2 , -1 , 0 és 2 .

6. feladat megoldása. Egy n oldalú konvex sokszög átlóinak a száma $\frac{n(n-3)}{2}$. A feladat

feltételei szerint $\frac{n(n-3)}{2} = 4n + 6$. Az utóbbi egyenlet ekvivalens az $n^2 - 11n - 12 = 0$

egyenlettel, amelynek gyökei: 12, illetve -1 . Ezek közül csak a 12 felel meg a feladat feltételeinek, azaz a szabályos sokszög oldalainak a száma 12. Ez egy r sugarú körbe írható. A feladat megoldásához használjuk fel a következő ábrát:



A leghosszabb átló hossza $2r$, a legrövidebb átló hossza az ábrán látható AC átló, amely az r sugarú körbe írható szabályos hatszög oldalának a hossza. Az $\angle AOB = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Az AOB egyenlőszárú háromszög, a T az alaphoz tartozó magasság talppontja. Az $AT = 4$, $\angle AOT = 15^\circ$. $\sin 15^\circ = \frac{4}{r}$, amiből $r = \frac{4}{\sin 15^\circ}$. Mivel $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$, ezért $r = \frac{16}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = 4(\sqrt{6} + \sqrt{2})$. A minimális átló hossza $AC = r = 4(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 15,455$, a maximális átló hossza $2r = 8(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \approx 30,91$.

A tesztkérdésekre adott helyes válaszok

A tesztkérdések megoldásait a következő táblázat tartalmazza:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
A	C	D	D	B	C	B	B	C	D	C	A	C	A	D	C	B	B	D	A

IRODALOM

[1] Vármonostory Endre: A Szendrei János Matematika Verseny feladatai, Módszertani Közlemények, 2011/2. Szeged,

SZERZŐINK, MUNKATÁRSAINK FIGYELMÉBE!

Tisztelettel kérjük szerzőinket, hogy kéziratukat a szerkesztőség címére küldjék: 6725 Szeged, Hattyas sor 10. A borítékra feltétlenül írják rá, hogy *kézirat*. Csak „gépelt”, 8–10 lapnál nem nagyobb terjedelmű kéziratokat fogadunk el. A kéziratot 1 példányban, 12-es betűmérettel, normál géppapíron, a „gépelési hibák” gondos javításával, a felhasznált szakirodalom pontos feltüntetésével (szerző, cím, hely, kiadó, lapszám) kérjük. A közérthetőség megkívánja azt is, hogy az elkerülhetetlen idegen szakkifejezések magyar megfeleléséről, értelmezéséről se feledkezzünk meg. Kérésünk az is, hogy a szövegbe iktatott rajzos, ábrás, illusztrációs megoldásoktól lehetőleg tekintsünk el.

Azok a szerzők, akik megfelelő feltételekkel rendelkeznek, a számítógéppel írt kéziratot e-mailben küldhetik el.

Nagyon fontos, hogy írják föl *beosztásukat, munkahelyük, iskolájuk pontos nevét, helyét*, valamint *irányítószám és lakcímüket*.

Felhívjuk továbbá szerzőink figyelmét, hogy másodközlésre nem vállalkozunk. Szerkesztőségünknel is érvényes az az általános gyakorlat, hogy kéziratot nem őrzünk meg és nem is küldünk vissza.